

アクチュアリー数学試験合格のためにやるべき こと、やってはいけないこと

藤田岳彦

中央大学理工学部経営システム工学科
確率解析・金融工学・保険数理研究室

2013/1/26

Contents

- ① 現在のアクチュアリー数学試験の確率
- ② やるべきこと 1
- ③ やってはいけないこと 1
- ④ やるべきこと 2
- ⑤ やってはいけないこと 2

確率

確率

- 事象の起こる確率とその計算
- 確率変数と確率分布
- 期待値離散、分散、共分散とその計算
- 離散確率分布（ベルヌーイ，2項，幾何，負の2項，ポアソン，超幾何）
- 連続確率分布（一様，指数，正規，ガンマ，ベータ， χ 二乗， t ， F ）

- 同時確率密度関数と 2 重積分
- 和, 差, 積, 商の分布と変数変換
- 確率母関数、モーメント母関数
- 大数の法則, 中心極限定理
- 条件付き確率, 条件付き期待値

やるべきこと 1

やるべきこと 1

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書
- 明解演習 数理統計 小寺平治著, 共立出版

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書
- 明解演習 数理統計 小寺平治著, 共立出版
- 確率統計演習 2, 国沢清典著 培風館

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書
- 明解演習 数理統計 小寺平治著, 共立出版
- 確率統計演習 2, 国沢清典著 培風館
- 確率統計モデリング問題集, 藤田岳彦著, 日本アクチュアリー会

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書
- 明解演習 数理統計 小寺平治著, 共立出版
- 確率統計演習 2, 国沢清典著 培風館
- 確率統計モデリング問題集, 藤田岳彦著, 日本アクチュアリー会
- モデリングテキスト, 日本アクチュアリー会

やるべきこと 1

- 弱点克服大学生の確率統計, 藤田岳彦著, 東京図書
- 明解演習 数理統計 小寺平治著, 共立出版
- 確率統計演習 2, 国沢清典著 培風館
- 確率統計モデリング問題集, 藤田岳彦著, 日本アクチュアリー会
- モデリングテキスト, 日本アクチュアリー会
- 過去問集

やってはいけないこと 1

やってはいけないこと 1

- 丸暗記

やってはいけないこと 1

- 丸暗記

(ただし,

- 関連暗記 $E(\Gamma(a, \lambda)) = \frac{a}{\lambda} = aE(\text{Exp}(\lambda))$,

ガンマ関数の定義とほとんど同値である

$$f_{\Gamma(a, \lambda)} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0) \text{ など数多くの例あり}$$

やっぺはいけなひこと 1

- 丸暗記

(ただし,

- 関連暗記 $E(\Gamma(a, \lambda)) = \frac{a}{\lambda} = aE(\text{Exp}(\lambda))$,

ガンマ関数の定義とほとんど同値である

$f_{\Gamma(a, \lambda)} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$ など数多くの例あり

- たしかめ暗記 $V(a + bX) = b^2 V(X)$,

やってはいけないこと 1

- 丸暗記

(ただし,

- 関連暗記 $E(\Gamma(a, \lambda)) = \frac{a}{\lambda} = aE(\text{Exp}(\lambda))$,

ガンマ関数の定義とほとんど同値である

$f_{\Gamma(a, \lambda)} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$ など数多くの例あり

- たしかめ暗記 $V(a + bX) = b^2 V(X)$,
- 自然暗記などは必要.)

やってはいけないこと 1

- 丸暗記

(ただし,

- 関連暗記 $E(\Gamma(a, \lambda)) = \frac{a}{\lambda} = aE(\text{Exp}(\lambda))$,

ガンマ関数の定義とほとんど同値である

$f_{\Gamma(a, \lambda)} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$ など数多くの例あり

- たしかめ暗記 $V(a + bX) = b^2 V(X)$,
- 自然暗記などは必要.)

また 統計の一部は覚えざるを得ない。

- ルベーク積分・測度論的確率論

- ルベーク積分・測度論的確率論
 - ただし数学科の人は学校で習う程度のことはやっておいたほうがよい。非数学科の人は必要なし

- ルベーク積分・測度論的確率論

- ただし数学科の人は学校で習う程度のことはやっておいたほうがよい。非数学科の人は必要なし
- 期待値の存在（可積分性） $E(|X|) < \infty$, フビニの定理、標本空間、確率空間、測度の（可算）加法性程度は 知っておいたほうがよい.

- ルベグ積分・測度論的確率論

- ただし数学科の人は学校で習う程度のことはやっておいたほうがよい。非数学科の人は必要なし
- 期待値の存在（可積分性） $E(|X|) < \infty$ ，フビニの定理、標本空間、確率空間、測度の（可算）加法性程度は 知っておいたほうがよい。
- 伊藤清先生は面白いことを言っておられた。 コルモゴロフが確率論の基礎をルベグ測度論に置き (Ω (標本空間) \mathcal{F} (事象全体), P (確率測度))=確率空間を設定し 確率変数を Ω から \mathbb{R} への (可測) 関数と定義するまでは 確率変数の和 $X + Y$ ですら数学的には あいまいな概念であった。 もちろん、コルモゴロフ以降は同じ標本空間を定義域とする実数値関数なので 関数の和は明確に定義できるのである。

やるべきこと 2

基本的な数学の知識，とくに確率や統計における典型的計算方法や基本分布に関する知識を蓄え十分な計算練習が必要不可欠

やるべきこと 2

基本的な数学の知識，とくに確率や統計における典型的計算方法や基本分布に関する知識を蓄え十分な計算練習が必要不可欠

- 問題をよく読み自分のよく知っていることや経験から解法を考える.

やるべきこと 2

基本的な数学の知識，とくに確率や統計における典型的計算方法や基本分布に関する知識を蓄え十分な計算練習が必要不可欠

- 問題をよく読み自分のよく知っていることや経験から解法を考える。
- 計算を簡単にする工夫を行う。

$$\bullet \sum_{\text{初}}^{\text{末}} = \frac{\text{初} - \text{末} \times \text{公比}}{1 - \text{公比}} \quad \text{例} \quad \sum_{k=30}^{60} 5^k = \frac{5^{30} - 5^{60} * 5}{1 - 5}$$

- 部分積分は負け

$$\int f(x)e^{-x} dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots)$$

- $\sum k(k-1)(k-2)$ のような級数で考える。

- 指数分布はしっぽから $\iint_{0 \leq x \leq 2y < \infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dx dy$ において x, y のどちらから先に積分するか?

- ガンマ知らないは負け。 **NO Beta, NO Life.** ガンマ・ベータは体の一部

ガンマ関数やベータ関数が使えないかをいつも考える。

やるべきこと 2

基本的な数学の知識，とくに確率や統計における典型的計算方法や基本分布に関する知識を蓄え十分な計算練習が必要不可欠

- 問題をよく読み自分のよく知っていることや経験から解法を考える。
- 計算を簡単にする工夫を行う。

$$\bullet \sum_{\text{初}}^{\text{末}} = \frac{\text{初} - \text{末} \times \text{公比}}{1 - \text{公比}} \quad \text{例} \quad \sum_{k=30}^{60} 5^k = \frac{5^{30} - 5^{60} * 5}{1 - 5}$$

- 部分積分は負け

$$\int f(x)e^{-x} dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots)$$

- $\sum k(k-1)(k-2)$ のような級数で考える。
- 指数分布はしっぽから $\iint_{0 \leq x \leq 2y < \infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dx dy$ において x, y のどちらから先に積分するか?
- ガンマ知らないは負け。 **NO Beta, NO Life.** ガンマ・ベータは体の一部

ガンマ関数やベータ関数が使えないかをいつも考える。

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択
- 分布関数か 密度関数か 母関数か?

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択
- 分布関数か 密度関数か 母関数か?
- 漸化式 や方程式がたてられないか?

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択
- 分布関数か 密度関数か 母関数か?
- 漸化式 や方程式がたてられないか?
- 帰納法や帰納的な考え方が使えないかどうか?

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択
- 分布関数か 密度関数か 母関数か?
- 漸化式 や方程式がたてられないか?
- 帰納法や帰納的な考え方が使えないかどうか? 独立や排反が使えるのか使えないのかをいつも注意

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $P(A)$ か $P(A^c)$ の選択
 - 分布関数か 密度関数か 母関数か?
 - 漸化式 や方程式がたてられないか?
 - 帰納法や帰納的な考え方が使えないかどうか? 独立や排反が使えるのか使えないのかをいつも注意
- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- 対称性に注意して 簡単になるのかどうか? 例
 $X \sim U(0, 1)$ なら $1 - X \sim U(0, 1)$

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (確率を求めたら, いつでも その値は **0** 以上 **1** 以下)

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (確率を求めたら, いつでも その値は 0 以上 1 以下)
- $P(a \leq X \leq Y \leq b) = 1$ なら $a \leq E(X) \leq E(Y) \leq b$

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (確率を求めたら, いつでも その値は 0 以上 1 以下)
- $P(a \leq X \leq Y \leq b) = 1$ なら $a \leq E(X) \leq E(Y) \leq b$
- $V(X) \geq 0$ 分散はいついかなるときでも非負. 定数を除いて正

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (確率を求めたら, いつでも その値は 0 以上 1 以下)
- $P(a \leq X \leq Y \leq b) = 1$ なら $a \leq E(X) \leq E(Y) \leq b$
- $V(X) \geq 0$ 分散はいついかなるときでも非負. 定数を除いて正
- $n = 0, 1, 2$ を代入して具体的に確かめる

例 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

検算しないは 負け

いろいろな角度からの検算は必要不可欠

- $0 \leq P(A) \leq 1$ (確率を求めたら、いつでも その値は 0 以上 1 以下)
- $P(a \leq X \leq Y \leq b) = 1$ なら $a \leq E(X) \leq E(Y) \leq b$
- $V(X) \geq 0$ 分散はいついかなるときでも非負. 定数を除いて正
- $n = 0, 1, 2$ を代入して具体的に確かめる
例 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- 数値の場合常識的な値になったかどうか? その際
 $e \simeq 2.72, e^{0.7} \simeq 2$ (これから 70 の法則) 「年複利 $r\%$ の預金は $\frac{70}{r}$ 年で 2 倍になる」が出る.)
 $e^3 \simeq 20, 2^{10} \simeq 10^3, 3^{12} \simeq 2^{19}$ などの値を知っておくと便利

- 確率密度関数を求めた場合 積分して1になるか や 非負の値かどうか？

例 $f_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$

- 確率密度関数を求めた場合 積分して 1 になるか や 非負の値かどうか？

例 $f_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$

- 分布関数 $F_X(x)$ は 単調増加か？

$F_X(\infty) = 1, F_X(-\infty) = 0$ か？

- 確率密度関数を求めた場合 積分して 1 になるか や 非負の値かどうか？

例 $f_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$

- 分布関数 $F_X(x)$ は 単調増加か？

$F_X(\infty) = 1, F_X(-\infty) = 0$ か？

- 確率 p を $p = 0$ や $p = 1$ にしたらどうなるのか？ (極端な場合を考えよ.)

例 幾何分布

$P(X = k) = p(1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

- 確率密度関数を求めた場合 積分して 1 になるか や 非負の値かどうか？

例 $f_C(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$

- 分布関数 $F_X(x)$ は 単調増加か？

$F_X(\infty) = 1, F_X(-\infty) = 0$ か？

- 確率 p を $p = 0$ や $p = 1$ にしたらどうなるのか？ (極端な場合を考えよ.)

例 幾何分布

$P(X = k) = p(1 - p)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

- 対称性・非対称性の検討

例 連続確率変数 X, Y, Z が $X \sim Y \sim Z$ で独立なら

$P(X < Y) = \frac{1}{2},$

$P(X < Z < Y) = \frac{1}{6}, E\left(\frac{X}{X+Y+Z}\right) = \frac{1}{3}$

やってはいけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である。

やってはいけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である.

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$

やっぺはいけなひこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である.

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$

やってはいけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である.

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$

やってはいけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である.

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$
- $f_C(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$

やってはいけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である。

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$
- $f_C(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

やっぺはいけなひこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である。

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$
- $f_C(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$
- $X \sim B(n, p)$ のとき, $V(X) = np(p - 1)$

やっではないけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である。

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$
- $f_C(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$
- $X \sim B(n, p)$ のとき, $V(X) = np(p - 1)$
- $F_X(x) = \frac{2}{1+x} \quad (0 \leq x < \infty)$

やっではないけないこと 2

検算しないとどうなるのか？以下はすべて実例である。

- $\sum_{k=30}^{70} (3k - 1) = -680$
- $X \sim U(0, 1)$ のとき $P(X > \frac{1}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} 1 = \infty$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10$ のとき $V(3 - 4X) = 3 - 4 * 100 = -397, \sigma(3 - 4X) = \sqrt{397}i = \text{虚数!!}$
- $f_C(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$
- $X \sim B(n, p)$ のとき, $V(X) = np(p - 1)$
- $F_X(x) = \frac{2}{1+x} \quad (0 \leq x < \infty)$
- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x} \quad (0 < x < \infty)$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \text{***}(0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n + 3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n + 3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \lambda$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \text{***}(0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n + 3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} (0 < x < \infty)$ で $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n+3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} (0 < x < \infty)$ で $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = 2x (0 < x < 1)$ のとき $Y = 1 - X$ の確率密度関数 $f_Y(x) = 2(1-x) \quad (0 < x < 1)$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n+3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} (0 < x < \infty)$ で $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = 2x (0 < x < 1)$ のとき $Y = 1 - X$ の確率密度関数 $f_Y(x) = 2(1-x) \quad (0 < x < 1)$
- $X \sim Po(3)$ のとき, $P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3}$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n+3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} (0 < x < \infty)$ で $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = 2x (0 < x < 1)$ のとき $Y = 1 - X$ の確率密度関数 $f_Y(x) = 2(1-x) \quad (0 < x < 1)$
- $X \sim Po(3)$ のとき, $P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3}$
- X の分布は 平均 1 の指数分布 のとき
 $P(-6 < X < 6) = \int_{-6}^6 e^{-x} dx = e^6 - e^{-6}$

- $f_{(X,Y)}(x,y) = \dots (0 \leq X \leq Y \leq 1)$ で
 $E(X) = 3, E(Y) = \frac{1}{3}$
- $a_n = P(A_n) = (n+3)^2 2^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$
- 死力 λ が一定の寿命確率変数 X の期待値 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} (0 < x < \infty)$ で $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $f_X(x) = 2x (0 < x < 1)$ のとき $Y = 1 - X$ の確率密度関数 $f_Y(x) = -2(1-x) \quad (0 < x < 1)$
- $X \sim Po(3)$ のとき, $P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3}$
- X の分布は 平均 1 の指数分布 のとき
 $P(-6 < X < 6) = \int_{-6}^6 e^{-x} dx = e^6 - e^{-6}$
- X の分布は 平均 1 の指数分布 のとき, $f_{-X}(x) = -e^{-x}$,
 $f_{-X}(x) = e^{-x} (-\infty < x < 0)$